

Mihail SANDU

PROBLEME DE FIZICĂ

EVENIMENTE OLIMPICE 24 - 45
SELECȚII PENTRU IPHO 2010 - 2021

volumul II



EDITURA DIDACTICĂ ȘI PEDAGOGICĂ S.A.

Evenimentul Olimpic – 24	Concursul Internațional Preolimpic de Fizică – 2009	4
Evenimentul Olimpic – 25	Selecția Lotului Lărgit (Baraj) pentru IPhO – 2010	16
Evenimentul Olimpic – 26	Selecția Lotului Restrâns pentru IPhO – 2010	22
Evenimentul Olimpic – 27	Selecția Lotului Lărgit (Baraj) pentru IPhO – 2011	55
Evenimentul Olimpic – 28	Selecția Lotului Restrâns pentru IPhO – 2011	65
Evenimentul Olimpic – 29	Concursul Internațional Preolimpic de Fizică – 2011	104
Evenimentul Olimpic – 30	Selecția Lotului Lărgit (Baraj) pentru IPhO – 2012	117
Evenimentul Olimpic – 31	Selecția Lotului Restrâns pentru IPhO – 2012	127
Evenimentul Olimpic – 32	Selecția Lotului Lărgit (Baraj) pentru IPhO – 2013	133
Evenimentul Olimpic – 33	Selecția Lotului Restrâns pentru IPhO – 2013	142
Evenimentul Olimpic – 34	Concursul Internațional Preolimpic de Fizică – 2013	151
Evenimentul Olimpic – 35	Selecția Lotului Lărgit pentru IPhO – 2014	159
Evenimentul Olimpic – 36	Selecția Lotului Restrâns pentru IPhO – 2014	168
Evenimentul Olimpic – 37	Selecția Lotului Lărgit (Baraj) pentru IPhO – 2015	180
Evenimentul Olimpic – 38	Selecția Lotului Restrâns pentru IPhO – 2015	184
Evenimentul Olimpic – 39	Concursul Internațional Preolimpic de Fizică – 2015	210
Evenimentul Olimpic – 40	Selecția Lotului Lărgit (Baraj) pentru IPhO – 2016	215
Evenimentul Olimpic – 41	Selecția Lotului Restrâns pentru IPhO 2017	226
Evenimentul Olimpic – 42	Concursul Internațional Preolimpic de Fizică – 2017	250
Evenimentul Olimpic – 43	Selecția Lotului Restrâns pentru IPhO – 2018	265
Evenimentul Olimpic – 44	Selecția Lotului Restrâns pentru IPhO – 2019	277
Evenimentul Olimpic – 45	Selecția Lotului Lărgit (Baraj), pentru IPhO– 2021	290
Evenimentul Olimpic – 46	Selecția Lotului Restrâns pentru IPhO – 2021	301
Cărțile mele 1977 – 2021		324

Evenimentul Olimpic – 24 Concursul Internațional Preolimpic de Fizică – 2009

România – Ungaria – Moldova, Călimănești
Problemă Propusă – Andrei Constantin și Mihail Sandu
Rezolvare – Andrei Constantin și Mihail Sandu

Problema 1. Inel ecuatorial gravitațional la suprafața Soarelui

Datorită rotației proprii a Soarelui, raza ecuatorială a acestuia este cu puțin mai mare decât raza sa polară, astfel încât distribuția materiei solare în jurul axei de rotație nu mai are o simetrie sferică. Din această cauză se produce precesia orbitelor planetelor din sistemul nostru solar (alunecarea/devierea/rotirea periheliului orbitei fiecărei planete). Într-un model simplu, putem considera că rotația Soarelui are ca efect formarea unui inel ecuatorial la suprafața sferei solare, cu grosimea neglijabilă și masa $M \ll M_s$, unde M_s este masa Soarelui (în care este inclusă și masa inelului).

Pentru a dovedi existența acestui efect vom considera că materia stelară este distribuită uniform și simetric față de axa perpendiculară pe planul orbitei planetei, iar energia potențială gravitațională a sistemului Soare – planetă, corespunzător modelului propus, când planeta cu masa m se află la distanța $r \gg R$ față de centrul Soarelui, este dată de expresia:

$$E_p = -\frac{k}{r} \left[1 + \frac{1}{2} J_2 \left(\frac{R}{r} \right)^2 - \frac{3}{8} J_4 \left(\frac{R}{r} \right)^4 + \frac{5}{16} J_6 \left(\frac{R}{r} \right)^6 + \dots \right],$$

unde R este raza Soarelui. Constantele $J_2, J_4, J_6, \dots$ depind de distribuția exactă a materiei solare în jurul axei de rotație a Soarelui.

a) Utilizând argumente de natură calitativă să se determine constanta k din expresia anterioară a energiei potențiale gravitaționale E_p . Se cunoaște constanta atracției universale, K .

b) Să se determine constanta J_2 din expresia anterioară a energiei potențiale gravitaționale E_p , utilizând modelul propus. Se va admite că:

$$(1 + \alpha)^n \cong 1 + n\alpha + \frac{1}{2} n(n-1)\alpha^2; \quad \alpha \ll 1.$$

c) Pentru orbite eliptice cu excentricitate foarte mică, deviația foarte mică a unei planete de la orbita circulară ecuatorială se poate explica admitând că

planeta efectuează oscilații radiale cu amplitudine foarte mică, în jurul unei distanțe $r = r_0$, oscilații care se suprapun peste mișcarea circulară a planetei în jurul Soarelui. (Dacă acest proces se analizează în condițiile respectării legii conservării momentului cinetic, atunci se demonstrează că oscilațiile radiale ale planetei trebuie să fie însoțite și de oscilații unghiulare cu aceeași perioadă. În această problemă se neglijează acest efect.)

Să se determine perioada oscilațiilor radiale ale planetei, considerând că $J_2 = 0$. Se cunoaște perioada de revoluție a planetei în jurul Soarelui, T_{rev} .

d) Considerând $J_2 = 0$ să se scrie expresia energiei cinetice a planetei în funcție de: proiecția impulsului planetei pe direcție radială, p_r ; momentul cinetic al planetei, L ; masa planetei, m ; distanța de la planetă la centrul Soarelui, r .

e) Având în vedere că momentul cinetic al planetei este $L = \text{constant}$, să se identifice, ca fiind potențialul gravitațional efectiv al punctului unde se află planeta (V_{ef}), toți termenii din expresia energiei totale a sistemului Soare – planetă, care nu depind de impulsul radial al planetei. (Introducerea noțiunii de potențial gravitațional efectiv reduce mișcarea plană a planetei la o mișcare radială a acesteia.)

f) Să se determine distanța r_0 pentru care se anulează forța efectivă.

g) Utilizând aproximația propusă în problemă să se determine expresia aproximativă a energiei totale a sistemului Soare – planetă, pentru $r \approx r_0$, reținând cel mult termenii în R^2 și apoi, comparând această expresie cu expresia energiei totale a unui oscilator armonic, să se determine perioada oscilațiilor radiale ale planetei, T_{osc} , în cazul $J_2 \neq 0$.

h) Să se stabilească expresia aproximativă a perioadei de precesie a planetei, T_{precesie} , în funcție de: momentul cinetic al planetei, L ; masa inelului din jurul sferei solare, M ; constanta J_2 din expresia energiei potențiale; constanta atracției universale, K ; masa planetei, m ; raza Soarelui, R .

Rezolvare

a) Din expresia dată pentru energia potențială gravitațională a sistemului Soare – planetă, adevărată în cazul abaterilor de la distribuția sferică:

$$E_p = -\frac{k}{r} \left[1 + \frac{1}{2} J_2 \left(\frac{R}{r} \right)^2 - \frac{3}{8} J_4 \left(\frac{R}{r} \right)^4 + \frac{5}{16} J_6 \left(\frac{R}{r} \right)^6 + \dots \right],$$

unde termenii superiori apar doar în cazul abaterilor de la distribuția sferică, trebuie să rezulte expresia cunoscută a energiei potențiale a sistemului Soare – planetă, atunci când distribuția masei Soarelui este sferică:

$$E_p = -K \frac{mM_s}{r}.$$

În aceste condiții, prin neglijarea termenilor datorati abaterilor de la distribuția sferică, rezultă:

$$k = KmM_s,$$

unde m – masa planetei, M_s – masa Soarelui, K – constanta atracției universale.

b) În desenul din figura 1 este evidențiat un sector elementar, cu masa dM , de pe conturul inelului circular cu masa M . Energia potențială gravitațională elementară a sistemului format din planeta cu masa m și sectorul elementar cu masa dM de pe conturul inelului circular, este:

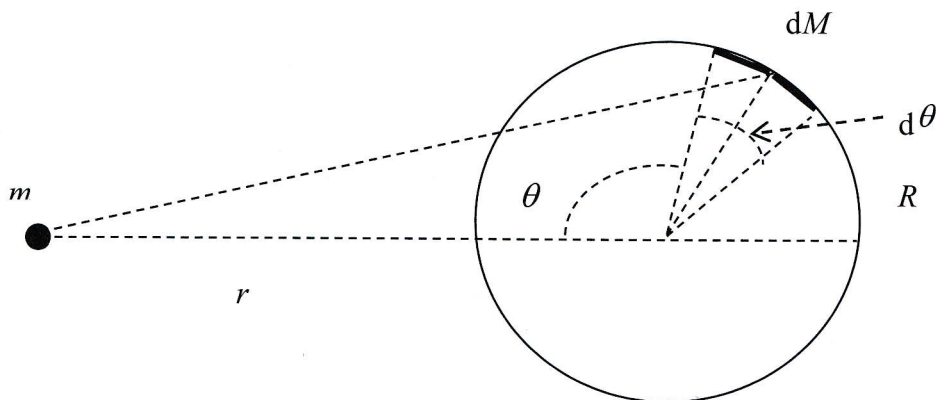


Fig. 1

$$dE_p = -K \frac{mdM}{\sqrt{r^2 + R^2 - 2rR \cos \theta}};$$

$$M = 2\pi R\gamma,$$

unde γ – densitatea liniară a inelului;

$$dM = \gamma ds = \gamma R d\theta; \quad dM = \frac{M}{2\pi} d\theta;$$

$$dE_p = -K \frac{mM d\theta}{2\pi \sqrt{r^2 + R^2 - 2rR \cos \theta}}.$$

Energia potențială gravitațională a sistemului format din planeta cu masa m și întregul inel circular cu masa M este:

$$E_{p, \text{inel-planetă}} = -K \frac{mM}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{\sqrt{r^2 + R^2 - 2rR \cos \theta}};$$

$$E_{p,inel-planeta} = -K \frac{mM}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{r \sqrt{1 + \frac{R^2}{r^2} - 2 \frac{R}{r} \cos \theta}};$$

$$E_{p,inel-planeta} = -K \frac{mM}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{1}{r} \left[1 + \left(\frac{R^2}{r^2} - 2 \frac{R}{r} \cos \theta \right) \right]^{-\frac{1}{2}} d\theta;$$

$$\frac{R^2}{r^2} - 2 \frac{R}{r} \cos \theta = \alpha \ll 1;$$

$$(1 + \alpha)^n \cong 1 + n\alpha + \frac{1}{2}n(n-1)\alpha^2; \alpha \ll 1;$$

$$\left[1 + \left(\frac{R^2}{r^2} - 2 \frac{R}{r} \cos \theta \right) \right]^{-\frac{1}{2}} \cong 1 - \frac{1}{2} \left(\frac{R^2}{r^2} - 2 \frac{R}{r} \cos \theta \right) + \frac{3}{8} \left(\frac{R^2}{r^2} - 2 \frac{R}{r} \cos \theta \right)^2;$$

$$\left[1 + \left(\frac{R^2}{r^2} - 2 \frac{R}{r} \cos \theta \right) \right]^{-\frac{1}{2}} \cong 1 - \frac{1}{2} \left(\frac{R^2}{r^2} - 2 \frac{R}{r} \cos \theta \right) + \frac{3}{8} \left(\frac{R^4}{r^4} - 4 \frac{R^3}{r^3} \cos \theta + 4 \frac{R^2}{r^2} \cos^2 \theta \right);$$

$$\frac{R^4}{r^4} \rightarrow 0; \frac{R^3}{r^3} \rightarrow 0;$$

$$\left[1 + \left(\frac{R^2}{r^2} - 2 \frac{R}{r} \cos \theta \right) \right]^{-\frac{1}{2}} \cong 1 - \frac{1}{2} \left(\frac{R^2}{r^2} - 2 \frac{R}{r} \cos \theta \right) + \frac{3}{2} \left(\frac{R^2}{r^2} \cos^2 \theta \right);$$

$$\left[1 + \left(\frac{R^2}{r^2} - 2 \frac{R}{r} \cos \theta \right) \right]^{-\frac{1}{2}} \cong 1 + \frac{R}{r} \cos \theta + \frac{R^2}{r^2} \frac{3 \cos^2 \theta - 1}{2};$$

$$E_{p,inel-planeta} = -K \frac{mM}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{1}{r} \left(1 + \frac{R}{r} \cos \theta + \frac{R^2}{r^2} \frac{3 \cos^2 \theta - 1}{2} \right) d\theta.$$

Energia potențială gravitațională a sistemului format din planeta cu masa m și Soarele în cadrul modelului propus, este:

$$E_{p,model \text{ Soare-planeta}} = E_{p,Soare-planeta} + E_{p,inel-planeta};$$

$$\begin{aligned}
 E_{p,model \text{ Soare-planetă}} &= -K \frac{m(M_s - M)}{r} - \\
 &- K \frac{mM}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{1}{r} \left(1 + \frac{R}{r} \cos \theta + \frac{R^2}{r^2} \frac{3 \cos^2 \theta - 1}{2} \right) d\theta; \\
 &\int_0^{2\pi} \frac{1}{r} \left(1 + \frac{R}{r} \cos \theta + \frac{R^2}{r^2} \frac{3 \cos^2 \theta - 1}{2} \right) d\theta = \\
 &= \frac{1}{r} \int_0^{2\pi} d\theta + \frac{R}{r^2} \int_0^{2\pi} \cos \theta d\theta + \frac{3R^2}{2r^3} \int_0^{2\pi} \cos^2 \theta d\theta - \frac{R^2}{2r^3} \int_0^{2\pi} d\theta; \\
 &\int \cos \theta d\theta = -\sin \theta; \int \cos^2 \theta d\theta = \frac{1}{2} \left(\theta + \frac{\sin 2\theta}{2} \right); \\
 &\int_0^{2\pi} \frac{1}{r} \left(1 + \frac{R}{r} \cos \theta + \frac{R^2}{r^2} \frac{3 \cos^2 \theta - 1}{2} \right) d\theta = \\
 &= \frac{1}{r} \theta \Big|_0^{2\pi} - \frac{R}{r^2} \sin \theta \Big|_0^{2\pi} + \frac{3R^2}{2r^3} \frac{1}{2} \left(\theta + \frac{\sin 2\theta}{2} \right) \Big|_0^{2\pi} - \frac{R^2}{2r^3} \theta \Big|_0^{2\pi}; \\
 &\int_0^{2\pi} \frac{1}{r} \left(1 + \frac{R}{r} \cos \theta + \frac{R^2}{r^2} \frac{3 \cos^2 \theta - 1}{2} \right) d\theta = \frac{1}{r} 2\pi + \frac{3R^2}{2r^3} \frac{1}{2} 2\pi - \frac{R^2}{2r^3} 2\pi; \\
 &\int_0^{2\pi} \frac{1}{r} \left(1 + \frac{R}{r} \cos \theta + \frac{R^2}{r^2} \frac{3 \cos^2 \theta - 1}{2} \right) d\theta = \frac{1}{r} 2\pi + \frac{3R^2}{2r^3} \frac{1}{2} 2\pi - \frac{R^2}{2r^3} 2\pi; \\
 &\int_0^{2\pi} \frac{1}{r} \left(1 + \frac{R}{r} \cos \theta + \frac{R^2}{r^2} \frac{3 \cos^2 \theta - 1}{2} \right) d\theta = \frac{2\pi}{r} \left(1 + \frac{R^2}{4r^2} \right); \\
 E_{p,model \text{ Soare-planetă}} &= -K \frac{m(M_s - M)}{r} - \frac{K mM}{r} \left(1 + \frac{R^2}{4r^2} \right); \\
 E_{p,model \text{ Soare-planetă}} &= -K \frac{mM_s}{r} - K \frac{mM}{4r} \frac{R^2}{r^2}.
 \end{aligned}$$

Comparând cu expresia:

$$E_p = -\frac{k}{r} \left[1 + \frac{1}{2} J_2 \left(\frac{R}{r} \right)^2 - \frac{3}{8} J_4 \left(\frac{R}{r} \right)^4 + \frac{5}{16} J_6 \left(\frac{R}{r} \right)^6 + \dots \right],$$

din care reținem numai primii doi termeni, rezultă:

$$-K \frac{mM_s}{r} - K \frac{mM}{4r} \frac{R^2}{r^2} = -\frac{k}{r} \left[1 + \frac{1}{2} J_2 \left(\frac{R}{r} \right)^2 \right] = -K \frac{mM_s}{r} \left[1 + \frac{1}{2} J_2 \frac{R^2}{r^2} \right];$$

$$J_2 = \frac{1}{2} \frac{M}{M_s}.$$

c) Dacă $J_2 = 0$, înseamnă că traiectoria planetei în jurul Soarelui este o elipsă. În acest caz, orbita planetei fiind închisă, pe durata unei revoluții complete, reprezentând perioada de revoluție a planetei, T_{rev} , distanța dintre planetă și Soare are exact o valoare minimă (când planeta este la periheliu) și o valoare maximă (când planeta este la apheliu). Ca urmare, perioada oscilațiilor radiale mici ale planetei, T_{osc} , este strict egală cu perioada revoluției planetei în jurul Soarelui, $T_{\text{osc}} = T_{\text{rev}}$.

d) Din figura 2, unde am descompus vectorul viteză tangențială a planetei în două componente, rezultă:

$$\vec{v} = \vec{v}_{\parallel} + \vec{v}_{\perp}; \quad v^2 = v_{\parallel}^2 + v_{\perp}^2;$$

$$E_c = \frac{mv^2}{2} = \frac{1}{2} mv_{\parallel}^2 + \frac{1}{2} mv_{\perp}^2;$$

$$\vec{L} = \vec{r} \times m\vec{v}; \quad L = rmv \sin \alpha = rmv_{\perp}; \quad v_{\perp} = \frac{L}{mr};$$

$$E_c = \frac{1}{2} mv_{\parallel}^2 + \frac{L^2}{2mr^2}; \quad E_c = \frac{1}{2m} p_r^2 + \frac{L^2}{2mr^2}.$$

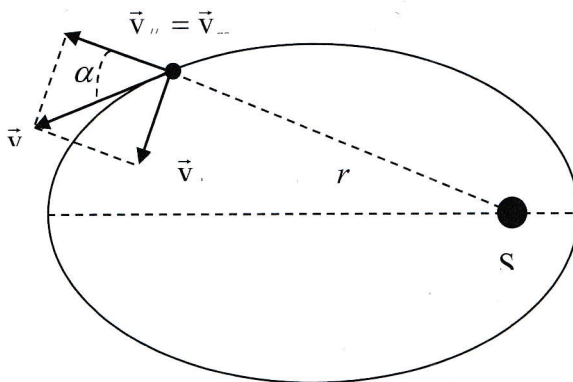


Fig. 2

e) Utilizând expresia generală a energiei potențiale gravitaționale a sistemului planetă – Soare:

$$E_p = -\frac{k}{r} \left[1 + \frac{1}{2} J_2 \left(\frac{R}{r} \right)^2 - \frac{3}{8} J_4 \left(\frac{R}{r} \right)^4 + \frac{5}{16} J_6 \left(\frac{R}{r} \right)^6 + \dots \right],$$

scrisă pentru orbita eliptică a planetei:

$$E_p = -\frac{k}{r} \left[1 + \frac{1}{2} J_2 \left(\frac{R}{r} \right)^2 \right],$$

precum și expresia generală a energiei cinetice, dedusă mai sus:

$$E_c = \frac{1}{2m} p_r^2 + \frac{L^2}{2mr^2},$$

rezultă că energia totală a sistemului planetă – Soare, este:

$$E = E_c + E_p = \frac{1}{2m} p_r^2 + \frac{L^2}{2mr^2} - \frac{k}{r} \left[1 + \frac{1}{2} J_2 \left(\frac{R}{r} \right)^2 \right].$$

Potențialul gravitațional efectiv al punctului unde se află planeta (V_{ef}), fiind reprezentat de suma tuturor termenilor din expresia energiei totale a sistemului Soare – planetă, care nu depind de impulsul radial al planetei, rezultă:

$$\begin{aligned} V_{ef} &= \frac{L^2}{2mr^2} - K \frac{mM_s}{r} \left[1 + \frac{1}{2} J_2 \frac{R^2}{r^2} \right]; \\ V_{ef} &= \frac{L^2}{2mr^2} - K \frac{mM_s}{r} - K \frac{mM_s J_2 R^2}{2r^3}; \\ V_{ef} &= \frac{L^2}{2mr^2} - \frac{k}{r} - \frac{k J_2 R^2}{2r^3}. \end{aligned}$$

f) Distanța r_0 , față de Soare, unde forța efectivă se anulează, se obține ca fiind soluția ecuației:

$$\frac{dV_{ef}}{dr} = 0.$$

Rezultă:

$$\begin{aligned} 2kmr^2 - 2L^2 r + 3kJ_2 R^2 &= 0; \\ r_{1,2} &= \frac{L^2}{2km} \left[1 \pm \sqrt{1 - 6J_2 R^2 \left(\frac{km}{L^2} \right)^2} \right]. \end{aligned}$$

Dacă $J_2 \rightarrow 0$, soluția cu „minus“ $\rightarrow 0$, iar potențialul efectiv corespunzător $V_{\text{ef}} \rightarrow +\infty$. Pentru a-i asigura potențialului efectiv o valoare finită, păstrăm numai soluția cu „plus“, astfel încât avem:

$$r_0 = \frac{L^2}{2km} \left[1 + \sqrt{1 - 6J_2 R^2 \left(\frac{km}{L^2} \right)^2} \right].$$

g) Știind că:

$$V_{\text{ef}}(r) = \frac{L^2}{2mr^2} - \frac{k}{r} - \frac{kJ_2 R^2}{2r^3},$$

rezultă că:

$$\begin{aligned} V_{\text{ef}}(r_0 + \varepsilon) &= \frac{L^2}{2m(r_0 + \varepsilon)^2} - \frac{k}{r_0 + \varepsilon} - \frac{kJ_2 R^2}{2(r_0 + \varepsilon)^3}; \\ V_{\text{ef}}(r_0 + \varepsilon) &= \frac{L^2}{2mr_0^2} \left(1 + \frac{\varepsilon}{r_0} \right)^{-2} - \frac{k}{r_0} \left(1 + \frac{\varepsilon}{r_0} \right)^{-1} - \frac{kJ_2 R^2}{2r_0^3} \left(1 + \frac{\varepsilon}{r_0} \right)^{-3}; \\ \frac{\varepsilon}{r_0} &\ll 1; \\ (1 + \alpha)^n &\cong 1 + n\alpha + \frac{1}{2}n(n-1)\alpha^2; \quad \alpha \ll 1; \\ V_{\text{ef}}(r_0 + \varepsilon) &\cong \frac{L^2}{2mr_0^2} \left(1 - 2\frac{\varepsilon}{r_0} + 3\frac{\varepsilon^2}{r_0^2} \right) - \frac{k}{r_0} \left(1 - \frac{\varepsilon}{r_0} + \frac{\varepsilon^2}{r_0^2} \right) - \\ &\quad - \frac{kJ_2 R^2}{2r_0^3} \left(1 - 3\frac{\varepsilon}{r_0} + 6\frac{\varepsilon^2}{r_0^2} \right); \\ V_{\text{ef}}(r_0 + \varepsilon) &\cong \left(\frac{L^2}{2mr_0^2} - \frac{k}{r_0} - \frac{kJ_2 R^2}{2r_0^3} \right) + \left(-\frac{L^2}{mr_0^3} + \frac{k}{r_0^2} + \frac{3kJ_2 R^2}{2r_0^4} \right) \varepsilon + \\ &\quad + \left(\frac{3L^2}{2mr_0^4} - \frac{k}{r_0^3} - \frac{3kJ_2 R^2}{r_0^5} \right) \varepsilon^2; \\ \left(\frac{L^2}{2mr_0^2} - \frac{k}{r_0} - \frac{kJ_2 R^2}{2r_0^3} \right) &= V_{\text{ef}}(r_0); \\ \left(-\frac{L^2}{mr_0^3} + \frac{k}{r_0^2} + \frac{3kJ_2 R^2}{2r_0^4} \right) &= \frac{1}{r_0^2} \frac{2kmr_0^2 - 2L^2r_0 + 3kmJ_2 R^2}{2mr_0^2} = 0; \\ V_{\text{ef}}(r_0 + \varepsilon) &\cong V_{\text{ef}}(r_0) + \left(\frac{3L^2}{2mr_0^4} - \frac{k}{r_0^3} - \frac{3kJ_2 R^2}{r_0^5} \right) \varepsilon^2; \end{aligned}$$

$$r_0 = \frac{L^2}{2km} \left[1 + \sqrt{1 - 6J_2 R^2 \left(\frac{km}{L^2} \right)^2} \right];$$

$$\sqrt{1 - 6J_2 R^2 \left(\frac{km}{L^2} \right)^2} = \left[1 - 6J_2 R^2 \left(\frac{km}{L^2} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}}; \quad 6J_2 R^2 \left(\frac{km}{L^2} \right)^2 \ll 1;$$

$$(1 + \alpha)^n \cong 1 + n\alpha + \frac{1}{2}n(n-1)\alpha^2; \quad \alpha \ll 1;$$

$$\begin{aligned} \sqrt{1 - 6J_2 R^2 \left(\frac{km}{L^2} \right)^2} &= \left[1 - 6J_2 R^2 \left(\frac{km}{L^2} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} \cong \\ &\cong 1 - 3J_2 R^2 \left(\frac{km}{L^2} \right)^2 - \frac{9}{2} J_2^2 R^4 \left(\frac{km}{L^2} \right)^4 \cong 1 - 3J_2 R^2 \left(\frac{km}{L^2} \right)^2; \end{aligned}$$

$$r_0 \cong \frac{L^2}{2km} \left[2 - 3J_2 R^2 \left(\frac{km}{L^2} \right)^2 \right];$$

$$r_0 \cong \frac{L^2}{km} \left[1 - \frac{3}{2} J_2 R^2 \left(\frac{km}{L^2} \right)^2 \right];$$

$$\begin{aligned} &\left(\frac{3L^2}{2mr_0^4} - \frac{k}{r_0^3} - \frac{3kJ_2 R^2}{r_0^5} \right) = \\ &= \frac{3L^2 k^4 m^4}{2mL^8} \left[1 - \frac{3}{2} J_2 R^2 \left(\frac{km}{L^2} \right)^2 \right]^{-4} - \\ &- \frac{kk^3 m^3}{L^6} \left[1 - \frac{3}{2} J_2 R^2 \left(\frac{km}{L^2} \right)^2 \right]^{-3} - \\ &- \frac{3kJ_2 R^2 k^5 m^5}{L^{10}} \left[1 - \frac{3}{2} J_2 R^2 \left(\frac{km}{L^2} \right)^2 \right]^{-5}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\left(\frac{3L^2}{2mr_0^4} - \frac{k}{r_0^3} - \frac{3kJ_2 R^2}{r_0^5} \right) \cong \\ &\cong \frac{3k^4 m^3}{2L^6} \left[1 + 4 \frac{3}{2} J_2 R^2 \left(\frac{km}{L^2} \right)^2 \right] - \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & -\frac{k^4 m^3}{L^6} \left[1 + 3 \frac{3}{2} J_2 R^2 \left(\frac{km}{L^2} \right)^2 \right] - \\
 & -\frac{3k^6 m^5 J_2 R^2}{L^{10}} \left[1 + 5 \frac{3}{2} J_2 R^2 \left(\frac{km}{L^2} \right)^2 \right]; \\
 & \left(\frac{3L^2}{2mr_0^4} - \frac{k}{r_0^3} - \frac{3kJ_2 R^2}{r_0^5} \right) = \\
 & = \frac{k^4 m^3}{L^6} \left[\frac{3}{2} + 6 \frac{3}{2} J_2 R^2 \left(\frac{km}{L^2} \right)^2 - 1 - \frac{9}{2} J_2 R^2 \left(\frac{km}{L^2} \right)^2 \right] - \\
 & -\frac{3k^6 m^5 J_2 R^2}{L^{10}} \left[1 + \frac{15}{2} J_2 R^2 \left(\frac{km}{L^2} \right)^2 \right]; \\
 & \left(\frac{3L^2}{2mr_0^4} - \frac{k}{r_0^3} - \frac{3kJ_2 R^2}{r_0^5} \right) \cong \\
 & \cong \frac{k^4 m^3}{L^6} \left[\frac{1}{2} + \frac{9}{2} J_2 R^2 \left(\frac{km}{L^2} \right)^2 \right] - \frac{3k^6 m^5 J_2 R^2}{L^{10}}; \\
 & \left(\frac{3L^2}{2mr_0^4} - \frac{k}{r_0^3} - \frac{3kJ_2 R^2}{r_0^5} \right) = \\
 & = \frac{k^4 m^3}{L^6} \left[\frac{1}{2} + \frac{9}{2} J_2 R^2 \left(\frac{km}{L^2} \right)^2 - 3J_2 R^2 \left(\frac{km}{L^2} \right)^2 \right]; \\
 & \left(\frac{3L^2}{2mr_0^4} - \frac{k}{r_0^3} - \frac{3kJ_2 R^2}{r_0^5} \right) = \frac{k^4 m^3}{2L^6} \left[1 + 3J_2 R^2 \left(\frac{km}{L^2} \right)^2 \right]; \\
 & V_{\text{ef}}(r_0 + \varepsilon) \cong V_{\text{ef}}(r_0) + \left(\frac{3L^2}{2mr_0^4} - \frac{k}{r_0^3} - \frac{3kJ_2 R^2}{r_0^5} \right) \varepsilon^2; \\
 & V_{\text{ef}}(r_0 + \varepsilon) = V_{\text{ef}}(r_0) + \frac{k^4 m^3}{L^6} \left[1 + 3J_2 R^2 \left(\frac{km}{L^2} \right)^2 \right] \frac{\varepsilon^2}{2}.
 \end{aligned}$$